

Румянцев К.А.

ФГУП «Крыловский государственный научный центр», Санкт-Петербург, Россия

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БЛИЖНЕГО АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, ВОЗБУЖДАЕМОЙ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

Численное моделирование процессов излучения звука упругими телами является актуальной задачей при разработке средств акустической защиты (САЗ), акустических преобразователей, а также при снижении уровней шума машин и механизмов. При решении данных задач широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ). В связи с этим представляет интерес оценка достоверности полученных этим методом решений. Целью работы является сопоставление результатов, полученных с помощью МКЭ, и аналитического решения для известной задачи об излучении звука. В статье рассмотрена задача об излучении звука упругой бесконечной пластиной (аналитическое решение опубликовано в [1] и [2]). Выполнен расчет поля комплексного акустического давления вблизи пластины с помощью аналитических и численных моделей. Рассчитаны значения поля комплексного акустического давления вблизи пластины. Выполнено сравнение результатов, полученных методом конечных элементов и с помощью аналитического уравнения. Результаты численного моделирования и аналитического расчета хорошо согласуются между собой, что подтверждает возможность применения метода конечных элементов для моделирования процессов излучения звука упругими телами.

**Ключевые слова:** МКЭ, FSI, излучение звука, коэффициент прохождения.

Автор заявляет об отсутствии возможных конфликтов интересов.

Для цитирования: Румянцев К.А. Численное моделирование ближнего акустического поля бесконечной пластины, возбуждаемой сосредоточенной силой. Труды Крыловского государственного научного центра. 2018; специальный выпуск 1: 103–108.

УДК 534.83.011.55

DOI: 10.24937/2542-2324-2018-1-S-I-103-108

Rumyantsev A.

Krylov State Research Centre, St. Petersburg, Russia

## NUMERICAL MODELING OF NEAR ACOUSTIC FIELD OF AN INFINITE PLATE EXCITED BY POINT FORCE

Numerical modeling of the processes involved in acoustic radiation of elastic bodies is an important task in development of acoustic protection tools (APT), acoustic transducers as well as reduction of noise levels in machinery and equipment. These issues are widely addressed using the Finite Element Analysis (FEA) method. In this connection it is of interest to examine the reliability of solutions obtained with this method. The purpose of this paper is to compare the results obtained by FEA and analytical solutions obtained for the known problem of noise radiation. The case study is noise radiation by an infinite elastic plate (the analytical solution was published in [1] and [2]). The complex acoustic pressure near the plate is calculated using analytical and numerical models. The complex acoustic pressure field near the plate is calculated. Comparison is made between the results obtained by FEA and analytical equations. The results of numerical modelling and analytical calculations are in good agreement, which confirms that the finite element method can be used for modelling noise radiation by elastic bodies.

**Key words:** FEA, FSI, noise radiation, transmission factor.

Author declares lack of the possible conflicts of interests.

For citations: Rumyantsev A. Numerical modeling of near acoustic field of an infinite plate excited by point force. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2018; special issue 1: 103–108 (in Russian).

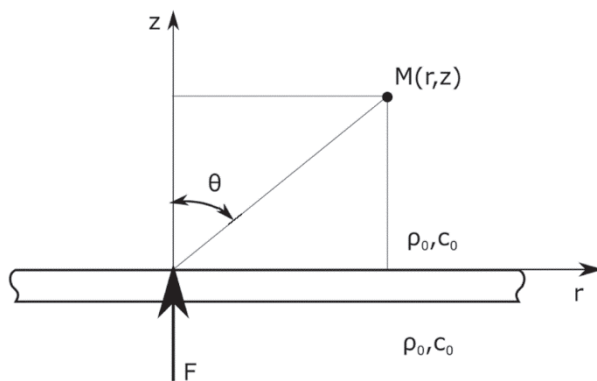
UDC 534.83.011.55

DOI: 10.24937/2542-2324-2018-1-S-I-103-108



Задача об излучении звука упругим телом в жидкости имеет большое практическое значение при разработке акустических излучателей, снижении уровня шумов машин и механизмов, разработке эффективных средств акустической защиты. При расчете звуковых полей, формирующихся вблизи упругих тел, необходимо учитывать как особенности распространения звуковых колебаний в упругих телах, так и их взаимодействие со средой, в которой они находятся. Ввиду сложного характера подобного взаимодействия его описание с помощью аналитических формул затруднено. Метод конечных элементов позволяет решать подобные задачи для произвольных граничных условий. При этом единственным практическим ограничением является сложность задачи, выраженная в количестве степеней свободы рассматриваемой модели. В настоящее время возможно решение достаточно объемных задач (до нескольких миллионов степеней свободы). Однако перед применением данного метода целесообразно провести его «верификацию», т.е. сравнение полученных результатов с известными достоверными результатами. Задачей настоящей работы является сравнение результатов численного моделирования и аналитического расчета. Одной из характерных задач подобного взаимодействия, имеющих аналитическое решение, является задача об излучении звука упругой бесконечной пластиной, погруженной в жидкость и возбуждаемой сосредоточенной нормальной силой. Решение данной задачи опубликовано в [1].

Общая схема постановки задачи показана на рис. 1. Бесконечная пластина погружена в жидкую



**Рис. 1.** Бесконечная пластина в жидкости. Система координат и обозначения соответствуют формуле (1)

**Fig. 1.** Infinite plate in liquid. Coordinate axes and symbols as per formula (1)

среду с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Возбуждаемая гармонической силой  $F$ , пластина становится излучателем звуковых колебаний. Вблизи поверхности пластины формируется так называемое «ближнее» акустическое поле. Оно имеет сложную форму и является суперпозицией нескольких видов волн. В статье [1] дано аналитическое уравнение, связывающее силу  $F$ , коэффициент прохождения звука  $\beta$  и комплексную амплитуду акустического давления

$P$  в точке с координатами  $(r, z)$ :

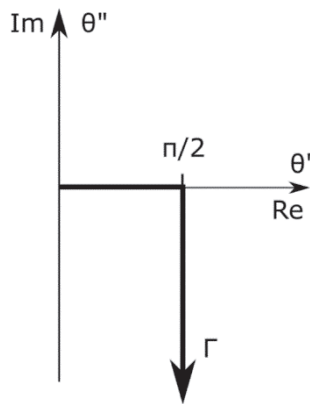
$$P(r, z) = \pm \frac{k^2 F}{4\pi} \times \int_0^{\frac{\pi}{2} - j\infty} \beta(\theta) J_0(kr \sin \theta) e^{(jkz \cos \theta)} \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (1)$$

где  $r, z$  – цилиндрические координаты;  $k$  – волновое число;  $J_0$  – функция Бесселя 0-го порядка.

Знак  $+$  в формуле (1) соответствует полупространству  $z+$  на рис. 1. Данное уравнение выведено из общего уравнения Гельмгольца, описывающего волновые процессы в жидкости.

Одним из сомножителей подынтегрального выражения (1) является коэффициент прохождения звука  $\beta$ . Данный коэффициент определяется для условий падения на пластину плоской волны, в соответствии с [2], где аналитические зависимости для определения этого коэффициента приведены в наиболее общем виде (для произвольной волновой толщины бесконечно-го упругого слоя в жидкости).

Расчет акустического давления вблизи пластины осложняется пределами интегрирования в формуле (1). Действительно, интеграл по контуру (показан на рис. 2) не может быть определен численно ввиду неограниченного предела интегрирования. В работе [3] предложен алгоритм численного интегрирования аналогичного выражения. Поскольку при интегрировании вдоль мнимой оси подынтегральное выражение (1) уменьшается, можно определить величину данного интеграла с заданной точностью, например  $10^{-3}$ . Для этого определяется предел интегрирования  $T$ , при котором величина подынтегрального выражения не превышает заданной погрешности. Также следует учесть возможность появления полюсов подынтегрального выражения на контуре интегрирования. В работе [3] показано, что даже при наличии малых потерь (0,001) в упругом слое, полюса на комплексной плоскости смещаются вправо по действительной оси от контура. В исходной работе [1] также были



**Рис. 2.** Контур интегрирования  $\Gamma$  на комплексной плоскости. Направление интегрирования показано стрелкой

**Fig. 2.** Integration contour  $\Gamma$  on complex plane. Integration direction as shown by arrow

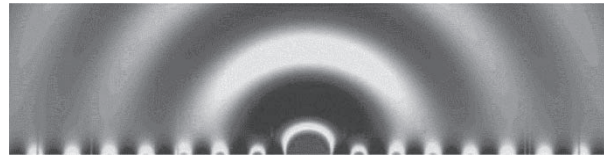
введены потери для слоя. Таким образом, при наличии потерь в упругом слое и с учетом допустимой погрешности интеграл может быть вычислен.

Для вычисления коэффициента прохождения необходимо задать физико-механические и геометрические свойства упругого слоя. Однако в работе [1] приведены лишь частичные сведения о параметрах модели. Указана волновая толщина  $kh$ , равная 0,2, однако отсутствуют физико-механические свойства материала слоя, частота выполнения расчета. При этом автором приведены некоторые производные от данных величин. Для определения исходных данных статьи [1] была проведена идентификация этих параметров симплексным методом [4] на основе известных величин. Результаты идентификации приведены в таблице.

Физико-механические и геометрические свойства упругого слоя

Physical & mechanical properties and geometric features of elastic layer

Наименование	Величина
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	7814,5
Модуль упругости, Па	$2 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона	0,2
Коэффициент потерь	0,001
Толщина, м	0,0191
Частота расчета, Гц	2500



**Рис. 3.** Действительная часть комплексного поля давления, полученного по формуле (1)

**Fig. 3.** Real part of complex pressure field obtained from formula (1)

Приведенные параметры могут отличаться от точных значений, использованных в работе [1], однако в совокупности они должны давать аналогичные результаты расчетов. Так, например, частота расчета и толщина пластины могут иметь другие значения, однако волновая толщина (произведение  $kh$ ) будет равна 0,2, как и указано в [1].

После идентификации параметров модели был выполнен расчет комплексного акустического поля в соответствии с (1). Действительная часть комплексного поля в полупространстве  $z^+$  показана на рис. 3.

На рис. 3 видны неоднородная (бегущая вдоль пластины) и сферическая волны. Для наглядности представления полученных данных и сравнения результатов расчета с результатами [1] был выполнен пересчет поля давлений из абсолютных комплексных значений давления в относительные  $P'(r, z)$ , выраженные в дБ относительно некоторого постоянного значения, в соответствии с формулой

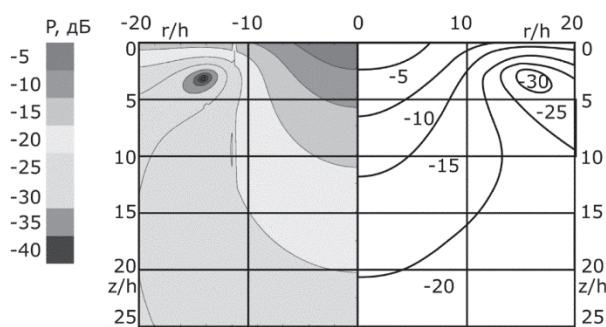
$$P'(r, z) = 20 \log_{10} \times \left[ \frac{1}{P_0} \cdot \sqrt{\left( \operatorname{Re} \left( \dot{P}(r, z) \right) \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \left( \dot{P}(r, z) \right) \right)^2} \right], \quad (2)$$

где  $P(r, z)$  – комплексная амплитуда давления в точке с координатами  $r, z$ ;  $P_0$  – модуль комплексной амплитуды давления в точке  $r, z = 0$ , численно равный 15,83 Па.

На рис. 4 приведены результаты расчетов [1] и настоящей работы в относительных давлениях. На левой половине рисунка ( $r = -20 \text{ h.}0$ ) приведены результаты, полученные в данной работе, на правой половине ( $r = 20 \text{ h.}0$ ) – результаты работы [1]. Цветом выделены равные относительные давления с шагом  $-5 \text{ дБ}$ .

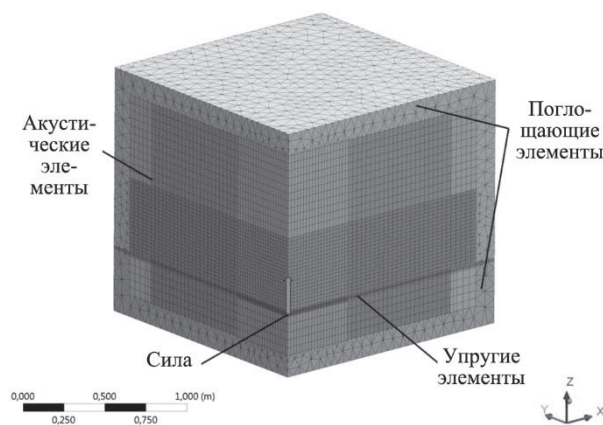
Результаты хорошо согласуются, что подтверждает правильность выбранного способа численного интегрирования и идентификации параметров модели.

Для получения аналогичного результата с помощью МКЭ была подготовлена конечно-элементная модель фрагмента бесконечной пластины. Отличительной особенностью данной модели является использование уравнений Навье – Стокса для описания волновых процессов в жидкости вместо уравнения Гельмгольца. Одним из препятствий для применения МКЭ в подобных задачах является задание соответствующих жидкому и упругому полупространству граничных условий. Для преодоления данного ограничения в модель введены «поглощающие» элементы, имитирующие полупространство. Общий вид конечно-элементной модели приведен на рис. 5. Начало



**Рис. 4.** Сравнение результатов расчета (цветной контур) и результатов [1] (черно-белый контур)

**Fig. 4.** Comparison of calculations (colored contour) and results from [1] (black & white contour)



**Рис. 5.** Конечно-элементная модель бесконечной пластины

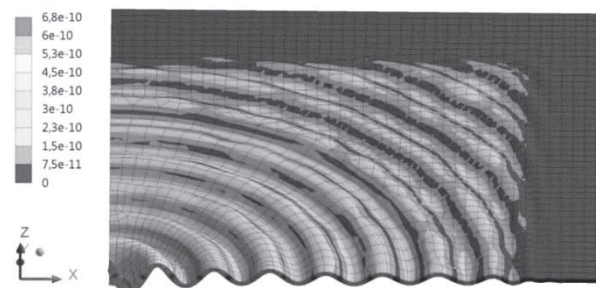
**Fig. 5.** Finite element model of infinite plate

координат ( $x = 0, y = 0, z = 0$ ) данной модели соответствует началу координат в цилиндрической системе ( $r = 0, z = 0$ ) для аналитической модели. Цветом выделены поглощающие элементы для жидкого и упругого полупространства решаемой задачи. Физико-механические характеристики упругой пластины аналогичны принятым ранее для аналитической модели.

В ходе предварительных расчетов был установлен осесимметричный характер данной задачи, позволяющий моделировать четверть от исходного объема, с соответствующим уменьшением возбуждающей силы ( $0,25 F$ ). Поскольку в данной задаче представляет интерес поле давлений с одной стороны от пластины (в направлении  $z+$ ), для экономии объема машинной памяти жидкость с обратной стороны пластины моделируется в меньшем объеме. С помощью вышеописанной модели были рассчитаны формы вынужденных упругих колебаний пластины в жидкости (показаны на рис. 6, масштаб перемещений для наглядности увеличен примерно в  $8 \cdot 10^7$  раз), а также поле давлений вблизи пластины.

Из рис. 6 видно, что вынужденные колебания пластины затухают по мере удаления от точки приложения силы. Характерная для ограниченной в размерах пластины стоячая волна отсутствует.

Для сравнения с предыдущим результатом были построены контуры равных относительных давлений в соответствии с формулой (2). При этом в качестве величины давления  $P_0$  использовано значение, полученное в начале системы координат МКЭ модели, равное 15,05 Па, что хорошо согласуется с результатом предыдущего расчета (15,83 Па). На рис. 7 для сравнения приведены результаты, полученные с помощью аналитической ( $r = -20 h \dots 0$ ) и МКЭ ( $r = 20 h \dots 0$ ) модели.



**Рис. 6.** Вынужденные колебания упругой пластины с поглощающими граничными условиями в жидкости

**Fig. 6.** Forced oscillations of elastic plate with absorbing boundary conditions in liquid



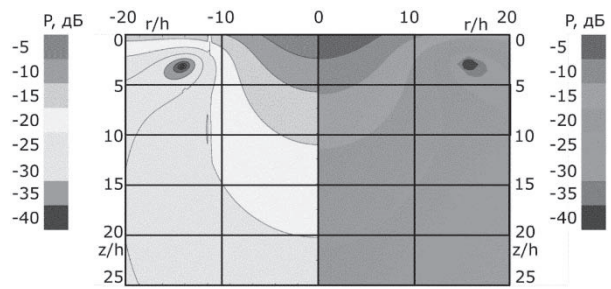
Вычисление значений поля комплексного акустического давления является достаточно ресурсоемкой задачей (по отношению к объему оперативной памяти и процессорному времени). Так, в [3] время вычисления одного значения комплексной амплитуды составляло до 10 с.

В то же время расчет отдельных значений может быть выполнен независимо, что позволяет использовать параллельные вычисления для ускорения расчетов. Для оценки возможного ускорения вычислений вышеописанные расчеты были выполнены в параллельном режиме с использованием до 48 процессорных ядер. На рис. 8 приведена зависимость времени расчета по аналитической модели в программном пакете MATLAB. Расчет выполнялся на 4-х ядерном процессоре Intel Core i5-2500K с тактовой частотой 3,3 ГГц и 4-х процессорном вычислительном кластере (4 процессора Amd Opteron 6174 с тактовой частотой 2,2 ГГц, суммарное количество ядер – 48).

Из рис. 8 видно, что время выполнения расчетов может быть уменьшено за счет использования параллельных вычислений. При использовании малого числа ядер преимущество в скорости выполнения расчетов имеет процессор с более высокой тактовой частотой (Intel), однако использование большего числа ядер (32) позволяет сократить общее время вычисления. Также следует отметить некоторое увеличение времени вычисления при использовании 48 ядер, что говорит о превышении накладных расходов процессорного времени (связанного с разбиением задачи на независимые блоки и сбором результатов) над сэкономленным за счет параллельного выполнения.

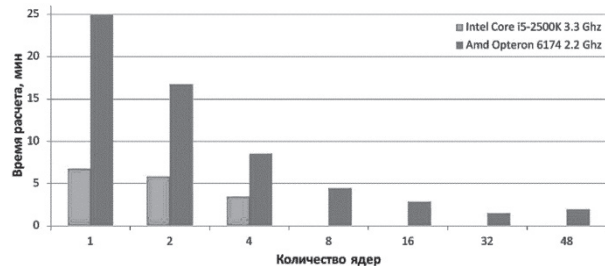
Аналогичная оценка возможностей параллельных вычислений выполнена для МКЭ с использованием программного пакета ANSYS. Результаты приведены на рис. 9.

В данной работе проведено сравнение результатов расчетов ближнего акустического поля бесконечной пластины в жидкости, возбуждаемой сосредоточенной нормальной силой, полученных с помощью аналитических формул, и МКЭ-расчета. Установлено, что оба способа дают близкие результаты. Небольшие расхождения могут быть вызваны применением различных математических моделей (уравнения Гельмгольца и Навье – Стокса), а также различной дискретизацией моделей (точки определения значений поля в аналитической модели и узлы конечно-элементной модели). В дальнейшем целесообразно сравнить результаты расчета коэффициента прохождения сферической звуковой волны через упругий слой, полученные с помощью МКЭ и аналитического решения, описанного в [3].



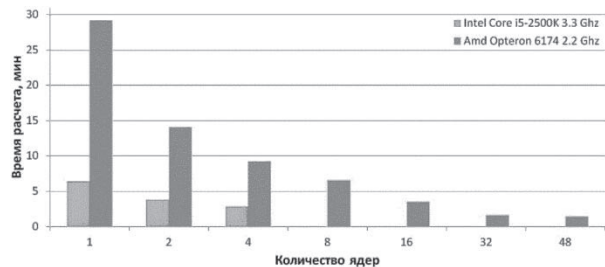
**Рис. 7.** Результаты аналитического ( $r = -20h..0$ ) и численного расчетов ( $r = 20h..0$ )

**Fig. 7.** Result of analytical calculations ( $r = -20h..0$ ) and numerical calculations ( $r = 20h..0$ )



**Рис. 8.** Время вычисления поля комплексных давлений с использованием параллельных вычислений

**Fig. 8.** Computational time of complex pressure field using parallel computations



**Рис. 9.** Время вычисления поля по МКЭ с использованием параллельных вычислений

**Fig. 9.** Computational time of pressure field by FEA using parallel computations

## Библиографический список

### References

1. *Плахов Д.Д.* Ближнее акустическое поле бесконечной пластины возбуждаемой сосредоточенной силой // Акустический журнал. 1967. Вып. 4(13). С. 304–306. [*D. Plakhov.* Acoustic near field of infinite plate excited by point force. Acoustic Journal. 1967; 4(13): 304–6. (In Russian)].
2. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. [*E. Shenderov.* Wave problems in hydroacoustics. L.: Sudostroenie, 1972. (In Russian)].
3. *Шендеров Е.Л.* Прохождение сферической звуковой волны через упругий слой // Акустический журнал. 1991. Вып. 4(37). С. 800–807. [*E. Shenderov.* Passage of spherical acoustic waver through elastic layer. Acoustic Journal. 1991; 4(13): 800–7. (In Russian)].

4. *Hamdy A.T.* Operations Research: An Introduction. Williams ed. 2007.
- 

### Сведения об авторах

*Румянцев Константин Андреевич*, начальник сектора ФГУП «Крыловский государственный научный центр». Адрес: Санкт-Петербург, 196158, Московское шоссе, д. 44. Тел.: 8 (812) 415-45-29, +7 (904) 512-22-82; E-mail: rum256@yandex.ru.

### About the authors

*Rumyantsev K.*, Head of sector, Krylov State Research Centre. Address: Moskovskoe shosse 44, St. Petersburg, 196158, Russia. Tel.: 8 (812) 415-45-29, +7 (904) 512-22-82; E-mail: rum256@yandex.ru.

Поступила / Received: 01.03.18  
Принята в печать / Accepted: 18.04.18  
© Румянцев К.А., 2018