С.А. ДАВЫДОВ[1], А.В. ЗЕМСКОВ[1, 2]
[1] Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва
[2] НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СВЯЗАННЫХ ТЕРМОУПРУГОДИФФУЗИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С УЧЕТОМ НЕНУЛЕВЫХ ВРЕМЕН РЕЛАКСАЦИИ

Представлена методика численно-аналитического расчета напряженно-деформированного состояния однородного многокомпонентного полупространства в условиях нестационарных поверхностных механических, термических и диффузионных воздействий. Одномерные процессы в среде описываются локально-равновесной моделью связанной термоупругой диффузии, учитывающей конечные скорости распространения всех видов возмущений. Искомые функции перемещений, приращений температуры и концентраций веществ ищутся в виде сверток по времени функций Грина и граничных условий. Для нахождения функций Грина используются преобразование Лапласа по времени и синус-, косинус-преобразования по координате. Проведен анализ полученных функций Грина и выполнен тестовый расчет.

Ключевые слова: термоупругая диффузия, моделирование физических процессов, функции Грина, преобразование Лапласа, преобразование Фурье, полупространство, нестационарные задачи.

Авторы заявляют об отсутствии возможных конфликтов интересов.

Для цитирования: Давыдов С.А., Земсков А.В. Распространение одномерных связанных термоупругодиффузионных возмущений в изотропном полупространстве с учетом ненулевых времен релаксации. Труды Крыловского государственного научного центра. 2018; Специальный выпуск 2: 144–150.

УДК 519.217.4 DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-S-I-144-150

S.A. DAVYDOV[1], A.V. ZEMSKOV[1, 2]
[1] Moscow Aviation Institute (National Research University), Volokolamskoe shosse, 4, F-80, GSP-3, Moscow, Russia
[2] Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Michurinsky pr., 1, Moscow, Russia

PROPAGATION OF MONOMERIC COUPLED THERMO-ELASTO-DIFFUSION DISTURBANCES IN ISOTROPIC SEMI-SPACE TAKING INTO ACCOUNT NON-ZERO RELAXATION TIME

The paper describes newly developed technique for numerically-analytical calculation of the stress-strain state of a homogeneous multi-component semi-space under unsteady surface mechanical, thermal and diffusion effects. One-dimensional processes in a medium are described by the unsteady local-equilibrium model of coupled thermoelastic diffusion taking into account the finite propagation velocities of all kinds of perturbations. The required functions of displacements, temperature increments, and substance concentrations are sought in the convolution form of Green's functions and boundary conditions. To find the Green's functions, we use the Laplace transform with respect to time and the sine-, cosine-transform along the coordinate. The analysis of the received Green's functions and the test calculation are done.

Key words: thermoelastic diffusion, simulation of physical processes, Green functions, Laplace transformation, Fourier transformation, semi-space, unsteady problems.

Author declares lack of the possible conflicts of interest.

For citations: Davydov S.A., Zemskov A.V. Propagation of monomeric coupled thermo-elasto-diffusion disturbances in isotropic semi-space taking into account non-zero relaxation time. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2018; Special issue 2: 144–150 (in Russian).

UDC 519.217.4 DOI: 10.24937/2542-2324-2018-2-S-I-144-150

Введение

Создание новых материалов с исключительными свойствами и разработка технологий для их получения требуют не только передовой экспериментальной базы, но и точных математических моделей, описывающих сложные физические процессы. Одним из способов модификации и уточнения моделей современных и перспективных технологических процессов является учет таких явлений, как связанность различных взаимодействующих между собой физических полей. Примером такой связанности является модель термоупругой диффузии, в которой рассматривается взаимодействие механических, тепловых и диффузионных полей.

Также при моделировании высокоинтенсивных технологических процессов необходимо принять во внимание тот факт, что реализация большинства из них сопровождается значительными деформациями, мощными тепловыми потоками, высокими скоростями нагрева и переноса массы на поверхности материала. В таком случае возникает необходимость не только в учете связанности, но и в рассмотрении конечных скоростей распространения тепла и вещества в исследуемой среде. Введение ненулевых времен релаксации и учет связанности полей позволяют создать более точную и устойчивую математическую модель для описания такого рода технологических процессов, как ионная имплантация, диффузионная пайка, термоводородная обработка, наращивание пленок на различных подкладках и т.д.

Из сказанного выше можно сделать вывод об актуальности проблемы построения моделей связанных физических процессов, что подтверждается работами отечественных [1–10] и зарубежных [11–18] ученых в этой области.

Необходимо учесть, что в основе многих ранее решенных задач термоупругой диффузии лежит гипотеза о бесконечной скорости распространения тепла и вещества [1–4, 6–10]. Для передовых технологических процессов, связанных с мощными тепловыми и диффузионными потоками, а также высокими температурами, имеет место нарушение этих гипотез [5, 11–14, 16–18].

В работе рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для однородного многокомпонентного полупространства с учетом ненулевых времен релаксации. Физико-механические процессы, протекающие в условии поверхностных механических, тепловых и диффузионных воздействий, описываются с помощью локально-равновесной модели связанной термоупругой диффузии, включающей уравнения движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса. Начальные условия приняты нулевыми.

Решение ищется в интегральной форме, представляющей собой свертку по времени функций Грина и граничных условий. Для нахождения функций Грина используются преобразование Лапласа по времени и синус-, косинус-преобразования по координате. В результате преобразований трансформанты искомых функций выражаются как рациональные дроби относительно параметра преобразования Лапласа, а их оригиналы находятся с помощью известных теорем и таблиц операционного исчисления. Обращение синус-, косинус-преобразований производится численно. Такой подход позволяет свести к минимуму использование численных алгоритмов и проанализировать полученные функции Грина.

Постановка задачи

Рассматривается одномерная нестационарная задача термоупругой диффузии для однородного N-компонентного полупространства, ограниченного поверхностью $x_1 = 0$ ($Ox_1x_2x_3$ – прямоугольная декартова система координат), с учетом ненулевых времен релаксации. Одномерные физико-механические процессы в среде описываются локально-равновесной моделью связанной термоупругой диффузии [5, 8, 11–14, 16–18] (штрих обозначает производную по безразмерной пространственной переменной x, а точки – производные по безразмерному времени τ), включающей

- уравнения движения упругой среды, теплопереноса и массопереноса:

$$\ddot{u} = u'' - b_u \vartheta' - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q',$$
$$\dot{\vartheta} + \tau_T \ddot{\vartheta} = k\vartheta'' - b_T\left(\dot{u}' + \tau_T \ddot{u}'\right) - \sum_{q=1}^{N} \beta_q \left(\dot{\eta}_q + \tau_T \ddot{\eta}_q\right), \quad (1)$$
$$\dot{\eta}_q + \tau_{\eta q}\ddot{\eta}_q = D_q \eta_q'' - \Lambda_q u''' - M_q \vartheta'' \quad \left(q = \overline{1, N}\right);$$

- граничные условия:

$$\left. u\right|_{x=0} = f_1(\tau), \quad \left.\vartheta'\right|_{x=0} = f_2(\tau),$$
$$\left.\left(\Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - D_q \eta_q'\right)\right|_{x=0} = f_{q+2}(\tau),$$
$$u = O(1), \quad \vartheta' = O(1), \quad (2)$$
$$\left(\Lambda_q u'' + M_q \vartheta' - D_q \eta_q'\right) = O(1) \quad (x \to \infty);$$

- начальные условия:

$$u\big|_{\tau=0} = \dot{u}\big|_{\tau=0} = \vartheta\big|_{\tau=0} = \dot{\vartheta}\big|_{\tau=0} = \eta_q\big|_{\tau=0} = \dot{\eta}_q\big|_{\tau=0} = 0. \qquad (3)$$

В (1)–(3) и далее используются безразмерные величины (при одинаковом начертании размерные величины обозначены звездочкой):

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho},$$
$$\alpha_q = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_q = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \quad \tau_T = \frac{Ct_T}{L},$$
$$\tau_{\eta q} = \frac{Ct_\eta^{(q)}}{L},$$
$$\Lambda_q = \frac{m^{(q)} n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \alpha_{11}^{(q)}}{\rho R T_0 C L},$$
$$M_q = \frac{n_0^{(q)} D_{11}^{(q)} \ln\left[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right]}{CL}, \qquad (4)$$
$$\kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 L C}, \quad \beta_q = \frac{n_0^{(q)} R \ln\left[n_0^{(q)} \gamma^{(q)}\right]}{m^{(q)} c_0},$$
$$\vartheta = \frac{\vartheta^*}{T_0}, \quad b_u = \frac{b_{11} T_0}{C_{1111}}, \quad b_T = \frac{b_{11}}{\rho c_0},$$
$$f_1(\tau) = \frac{f_1^*(t)}{L}, \quad f_2(\tau) = \frac{L f_2^*(t)}{T_0},$$
$$f_{q+2}(\tau) = \frac{f_{q+2}^*(t)}{n_0^{(q)} C},$$

где t – время; x_1 – декартова координата; u_1 – компонента вектора перемещений; L – характерный размер полупространства; q – номер компоненты вещества в составе N-компонентной среды; $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$ – приращение концентрации; $n_0^{(q)}$ и $n^{(q)}$ – начальная и актуальная концентрации; t_T – время тепловой релаксации; $t_\eta^{(q)}$ – время диффузионной релаксации; C_{1111} – упругая постоянная; ρ – плотность; b_{11} – температурная постоянная, характеризующая тепловые деформации; $\alpha_{11}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии; $D_{11}^{(q)}$ – коэффициент самодиффузии; $m^{(q)}$ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная; $\vartheta^* = T - T_0$ – приращение температуры; T и T_0 – актуальная и начальная температуры; κ_{11} – коэффициент теплопроводности; $\gamma^{(q)}$ – коэффициент активности; c_0 – удельная теплоемкость при постоянных концентрации и деформации.

Алгоритм решения

Решение задачи (1)–(3) представляем в виде [2, 3, 9, 10]

$$u(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} G_{1k}(x,\tau) * f_k(\tau),$$
$$\vartheta(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} G_{2k}(x,\tau) * f_k(\tau), \qquad (5)$$
$$\eta_q(x,\tau) = \sum_{k=1}^{N+2} G_{q+2,k}(x,\tau) * f_k(\tau),$$

где $G_{ik}(x,\tau)$ $\left(i,\, k = \overline{1,\, N+2}\right)$ – функции Грина задачи (1)–(3). Они являются решениями задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия:

$$G_{1k}\big|_{x=0} = \delta_{1k}\delta(\tau), \quad G'_{2k}\big|_{x=0} = \delta_{2k}\delta(\tau),$$
$$\left(\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+2,k} + M_q G'_{2k}\right)\Big|_{x=0} = \delta_{q+2,k}\delta(\tau);$$
$$G_{1k} = O(1), \quad G'_{2k} = O(1),$$
$$\left(\Lambda_q G''_{1k} - D_q G'_{q+2,k} + M_q G'_{2k}\right) = O(1) \quad (x \to \infty).$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака; δ_{ik} – символ Кронекера.

Применим к (1)–(3) преобразование Лапласа по времени (s – параметр преобразования, индекс «L» обозначает трансформанту):

$$s^2 u^L = u^{L\prime\prime} - b_u \vartheta^{L\prime} - \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q^{L\prime};$$
$$s(1+\tau_T s)\vartheta^L = \kappa\vartheta^{L\prime\prime} - s b_T (1+\tau_T s) u^{L\prime} -$$
$$-s(1+\tau_T s)\sum_{q=1}^{N} \beta_q \eta_q^L;$$
$$s(1+\tau_{\eta q} s)\eta_q^L = D_q \eta_q^{L\prime\prime} - \Lambda_q u^{L\prime\prime\prime} -$$
$$-M_q \vartheta^{L\prime\prime} \quad \left(q = \overline{1,N}\right);$$
$$u^L\big|_{x=0} = f_1^L(s), \quad \vartheta^{L\prime}\big|_{x=0} = f_2^L(s),$$
$$\left(\Lambda_q u^{L\prime\prime} + M_q \vartheta^{L\prime} - D_q \eta_q^{L\prime}\right)\Big|_{x=0} = f_{q+2}^L(s);$$
$$u^L = O(1), \quad \vartheta^{L\prime} = O(1),$$
$$\left(\Lambda_q u^{L\prime\prime} + M_q \vartheta^{L\prime} - D_q \eta_q^{L\prime}\right) = O(1) \quad (x \to \infty).$$

Далее редуцируем полученную краевую задачу к задаче с однородными краевыми условиями. С этой целью полагаем

$$u^{\mathrm{L}} = \varphi + U^{\mathrm{L}}, \quad \vartheta^{\mathrm{L}} = \theta + \Theta^{\mathrm{L}}, \quad \eta_q^{\mathrm{L}} = \psi_q + \Psi_q^{\mathrm{L}}, \tag{6}$$

где функции φ, θ и ψ_q задаются следующим образом [2, 3, 9]:

$$\begin{gathered}\varphi = e^{-x} f_1^{\mathrm{L}}, \quad \theta = -e^{-x} f_2^{\mathrm{L}}, \\ \psi_q = \frac{e^{-x}}{D_q}\left(-\Lambda_q f_1^{\mathrm{L}} - M_q f_2^{\mathrm{L}} + f_{q+2}^{\mathrm{L}}\right), \\ \varphi^*(x) = e^{-x}, \quad \theta^*(x) = -e^{-x}, \\ \psi_q^*(x) = \frac{e^{-x}}{D_q}.\end{gathered} \tag{7}$$

Тогда для функций U^{L}, Θ^{L} и Ψ_q^{L} получаем следующую задачу с нулевыми граничными условиями:

$$-U^{\mathrm{L}\prime\prime} + s^2 U^{\mathrm{L}} + b_u \Theta^{\mathrm{L}\prime} + \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \Psi_q^{\mathrm{L}\prime} = F_1;$$

$$s b_T \omega U^{\mathrm{L}\prime} - \kappa \Theta^{\mathrm{L}\prime\prime} + s\omega \Theta^{\mathrm{L}} + s\omega \sum_{q=1}^{N} \beta_q \Psi_q^{\mathrm{L}} = F_2;$$

$$\Lambda_q U^{\mathrm{L}\prime\prime\prime} + M_q \Theta^{\mathrm{L}\prime\prime} - D_q \Psi_q^{\mathrm{L}\prime\prime} + s\chi_q \Psi_q^{\mathrm{L}} = F_{q+2} \quad \left(q = \overline{1, N}\right);$$

$$U^{\mathrm{L}}\Big|_{x=0} = 0, \quad \Theta^{\mathrm{L}\prime}\Big|_{x=0} = 0,$$

$$\left(\Lambda_q U^{\mathrm{L}\prime\prime} - D_q \Psi_q^{\mathrm{L}\prime} - M_q \Theta^{\mathrm{L}\prime}\right)\Big|_{x=0} = 0,$$

где

$$F_1(x,s) = \varphi^* \left[\begin{gathered}\left(\left(1 - s^2\right) - \sum_{q=1}^{N} \frac{\alpha_q \Lambda_q}{D_q}\right) f_1^{\mathrm{L}} - \\ -\left(b_u + \sum_{q=1}^{N} \frac{\alpha_q M_q}{D_q}\right) f_2^{\mathrm{L}} + \sum_{q=1}^{N} \frac{\alpha_q}{D_q} f_{q+2}^{\mathrm{L}}\end{gathered}\right];$$

$$F_2(x,s) = \theta^* \left[\begin{gathered}-s\omega\left(b_T + \sum_{q=1}^{N} \frac{\beta_q \Lambda_q}{D_q}\right) f_1^{\mathrm{L}} + \\ + \left((\kappa - s\omega) - s\omega \sum_{q=1}^{N} \frac{\beta_q M_q}{D_q}\right) f_2^{\mathrm{L}} + \\ + s\omega \sum_{q=1}^{N} \frac{\beta_q}{D_q} f_{q+2}^{\mathrm{L}}\end{gathered}\right];$$

$$F_{q+2}(x,s) = \psi_q^* \left[\begin{gathered} s\chi_q \Lambda_q f_1^{\mathrm{L}} + s\chi_q M_q f_2^{\mathrm{L}} + \\ + \left(D_q - s\chi_q\right) f_{q+2}^{\mathrm{L}}\end{gathered}\right];$$

$$\omega(s) = 1 + \tau_T s, \quad \chi_q(s) = 1 + \tau_{\eta q} s.$$

Применяем к полученной системе синус-, косинус-преобразования Фурье [2, 3, 9]:

$$\begin{gathered}\left\{\begin{matrix} F_1(x,s) \\ U^{\mathrm{L}}(x,s) \\ u^{\mathrm{L}}(x,s)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\begin{matrix} F_1^{\mathrm{S}}(\lambda,s) \\ U^{\mathrm{LS}}(\lambda,s) \\ u^{\mathrm{LS}}(\lambda,s)\end{matrix}\right\} \sin\lambda x \, d\lambda, \\ \left\{\begin{matrix} F_2(x,s) \\ F_{q+2}(x,s) \\ \Theta^{\mathrm{L}}(x,s) \\ \Psi_q^{\mathrm{L}}(x,s) \\ \vartheta^{\mathrm{L}}(x,s) \\ \eta_q^{\mathrm{L}}(x,s)\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left\{\begin{matrix} F_2^{\mathrm{C}}(\lambda,s) \\ F_{q+2}^{\mathrm{C}}(\lambda,s) \\ \Theta^{\mathrm{LC}}(\lambda,s) \\ \Psi_q^{\mathrm{LC}}(\lambda,s) \\ \vartheta^{\mathrm{LC}}(\lambda,s) \\ \eta_q^{\mathrm{LC}}(\lambda,s)\end{matrix}\right\} \cos\lambda x \, d\lambda.\end{gathered} \tag{8}$$

После этого, с помощью соотношений (6) и (7), переходим к системе алгебраических уравнений относительно трансформант искомых функций u^{LS}, ϑ^{LC}, η_q^{LC}:

$$\begin{gathered} k_1 u^{\mathrm{LS}} - b_u \lambda \vartheta^{\mathrm{LC}} - \lambda \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \eta_q^{\mathrm{LC}} = 2\lambda f_1^{\mathrm{L}}, \\ b_T s\omega\lambda u^{\mathrm{LS}} + k_2 \vartheta^{\mathrm{LC}} + s\omega \sum_{q=1}^{N} \beta_q \eta_q^{\mathrm{LC}} = \\ = 2\left(s\omega b_T f_1^{\mathrm{L}} - \kappa f_2^{\mathrm{L}}\right), \\ \Lambda_q \lambda^3 u^{\mathrm{LS}} + M_q \lambda^2 \vartheta^{\mathrm{LC}} - k_{q+2} \eta_q^{\mathrm{LC}} = \\ = 2\left(\lambda^2 \Lambda_q f_1^{\mathrm{L}} - f_{q+2}^{\mathrm{L}}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

где

$$k_1(\lambda,s) = s^2 + \lambda^2;$$

$$k_2(\lambda,s) = s\omega + \kappa\lambda^2;$$

$$k_{q+2}(\lambda,s) = s\chi_q + D_q \lambda^2.$$

Решая систему (9), находим

$$u^{\mathrm{L}} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{1k}^{\mathrm{L}} f_k^{\mathrm{L}}; \quad \vartheta^{\mathrm{L}} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{2k}^{\mathrm{L}} f_k^{\mathrm{L}};$$

$$\eta_q^{\mathrm{L}} = \sum_{k=1}^{N+2} G_{q+2,k}^{\mathrm{L}} f_k^{\mathrm{L}}.$$

Здесь $G_{ik}^{\mathrm{L}} = G_{ik}^{\mathrm{L}}(x,s)$ – трансформанты Лапласа функций Грина (индекс «F» обозначает трансформанту синус-, косинус-преобразования),

$$\begin{gathered} G_{1k}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_{1k}^{\mathrm{LF}}(\lambda,s) \sin\lambda x \, d\lambda, \\ G_{2k}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_{2k}^{\mathrm{LF}}(\lambda,s) \cos\lambda x \, d\lambda, \\ G_{q+2,k}^{\mathrm{L}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty G_{q+2,k}^{\mathrm{LF}}(\lambda,s) \cos\lambda x \, d\lambda,\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$G_{ik}^{\mathrm{LF}} = \frac{P_{ik}(\lambda,s)}{P(\lambda,s)} \quad (i=1,2),$$

$$G_{q+2,k}^{\mathrm{LF}} = \frac{Q_{q+2,k}(\lambda,s)}{Q_q(\lambda,s)}; \tag{11}$$

$$P = \left(k_1k_2 + b_u b_T s\omega\lambda^2\right)\Pi - s\omega\lambda^6 \sum_{q=1}^{N} \Lambda_q \sum_{p=1}^{N} M_p \Pi_{qp} +$$

$$+\lambda^2 \sum_{q=1}^{N} \begin{bmatrix} s\omega\left(\beta_q M_q k_1 + b_T \alpha_q M_q \lambda^2 + \beta_q \Lambda_q b_u \lambda^2\right) - \\ -\alpha_q \Lambda_q k_2 \lambda^2 \end{bmatrix} \Pi_q;$$

$$P_{11} = 2\lambda\left(k_2 + b_T b_u s\omega\right)\Pi +$$

$$+2s\omega\lambda^5 \sum_{q=1}^{N} M_q \sum_{p=1}^{N} \Lambda_p \Pi_{qp} +$$

$$+2\lambda^3 \sum_{q=1}^{N} \begin{bmatrix} s\omega\left(\alpha_q M_q b_T + \beta_q M_q + b_u \beta_q \Lambda_q\right) - \\ -k_2 \alpha_q \Lambda_q \end{bmatrix} \Pi_q;$$

$$P_{12} = -2\kappa\lambda\left(b_u \Pi + \lambda^2 \sum_{q=1}^{N} \alpha_q M_q \Pi_q\right);$$

$$P_{1,q+2} = 2\lambda\left(k_2\alpha_q - s\omega b_u \beta_q\right)\Pi_q +$$

$$+2s\omega\lambda^3 \sum_{p=1}^{N} M_p \Pi_{qp};$$

$$P_{21} = 2s^3\omega b_T \Pi + 2s^3\omega\lambda^2 \sum_{q=1}^{N} \beta_q \Lambda_q \Pi_q -$$

$$-2s\omega\lambda^6 \sum_{q=1}^{N} \Lambda_q \sum_{p=1}^{N} \Lambda_p \Pi_{qp};$$

$$P_{22} = 2\kappa\left(\lambda^4 \sum_{q=1}^{N} \alpha_q \Lambda_q \Pi_q - k_1 \Pi\right);$$

$$P_{2,q+2} = -2s\omega\left[\left(k_1\beta_q + b_T\alpha_q\lambda^2\right)\Pi_q + \lambda^4 \sum_{p=1}^{N} \Lambda_p \Pi_{qp}\right];$$

$$Q_{q+2,l} = \lambda^2\left(\Lambda_q \lambda P_{1l} + M_q P_{2l}\right) - 2\delta_{1l}\lambda^2 \Lambda_q P + 2\delta_{q+2,l} P$$

$$\left(l = \overline{1, N+2}\right), \quad Q_q = k_{q+2} P;$$

$$\Pi = \prod_{r=1}^{N} k_{r+2}, \quad \Pi_q = \prod_{r=1, r\neq q}^{N} k_{r+2},$$

$$\Pi_{qp} = \left(\alpha_q\beta_p - \alpha_p\beta_q\right) \prod_{r=1; r\neq q,p}^{N} k_{r+2}.$$

Численное исследование многочлена $P(\lambda,s)$ позволяет сделать вывод, что для реально существующих материалов все нули – простые с отрицательной действительной частью. Из них в достаточно широком диапазоне параметра λ (от 0 до $\sim 10^4$) два нуля являются комплексными, остальные – действительными.

Исходя из этого, введем следующие обозначения: $s_1 = \xi_1 + i\zeta_1 \in \mathbb{C}$, $s_2 = \overline{s_1}$, $s_{j+2} \in \mathbb{R}$, $\left(j = 1, 2N+2\right)$ – нули многочлена $P(\lambda,s)$, $\xi_1 = \operatorname{Re} s_1 < 0$, $\zeta_1 = \left|\operatorname{Im} s_1\right|$. Тогда оригиналы по Лапласу трансформант функций Грина в (11) запишутся так:

$$G_{ik}^{\mathrm{F}}(\lambda,\tau) = e^{\xi_1\tau}\left(A_{ik}^{(1)} \cos\zeta_1\tau - A_{ik}^{(2)} \sin\zeta_1\tau\right) +$$

$$+\sum_{j=1}^{2N+2} A_{ik}^{(j+2)} e^{s_{j+2}\tau} +$$

$$+\delta_{i,q+2}\left(A_{ik}^{(2N+5)} e^{s_{2N+5}\tau} + A_{ik}^{(2N+6)} e^{s_{2N+6}\tau}\right) \tag{12}$$

$$\left(i,k = \overline{1, N+2}\right),$$

где s_{2N+5} и s_{2N+6} – дополнительные нули многочлена $Q_q(\lambda,s)$ за счет множителя $k_{q+2}(\lambda,s)$. Коэффициенты $A_{ik}^{(l)}(\lambda)$ находятся по формулам ($k = \overline{1, N+2}$, штрих означает производную по параметру s)

$$A_{ik}^{(1)} = 2\operatorname{Re}\frac{P_{ik}(\lambda,s_1)}{P'(\lambda,s_1)}, \quad A_{ik}^{(2)} = 2\operatorname{Im}\frac{P_{ik}(\lambda,s_1)}{P'(\lambda,s_1)};$$

$$A_{ik}^{(j+2)} = \frac{P_{ik}(\lambda,s_{j+2})}{P'(\lambda,s_{j+2})} \quad \left(i = \overline{1,2}, \; j = \overline{1, 2N+2}\right);$$

$$A_{q+2,k}^{(1)} = 2\operatorname{Re}\frac{Q_{q+2,k}(\lambda,s_1)}{Q_q'(\lambda,s_1)}, \quad A_{q+2,k}^{(2)} = 2\operatorname{Im}\frac{Q_{q+2,k}(\lambda,s_1)}{Q_q'(\lambda,s_1)};$$

$$A_{q+2,k}^{(r+2)} = \frac{Q_{q+2,k}(\lambda,s_{r+2})}{Q_q'(\lambda,s_{r+2})} \quad \left(q = \overline{1, N}, \; r = \overline{1, 2N+4}\right).$$

Для окончательного выражения искомых функций найденные таким образом функции Грина подставляются в свертки (5). При этом обращение синус-, косинус-преобразований Фурье (8) и (10) осуществляется численно [2, 3, 9].

Расчетный пример

Положим для расчета в граничных условиях (2), что граница теплоизолированного полупространства жестко закреплена и на ней задан диффузионный поток:

$$f_1(\tau) = f_2(\tau) \equiv 0, \quad f_3(\tau) = 10^{-20} \cdot H(\tau). \tag{13}$$

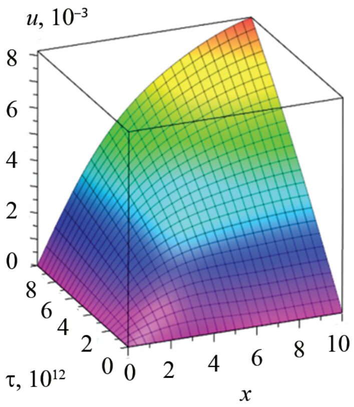

Рис. 1. Зависимость перемещения от времени и глубины полупространства

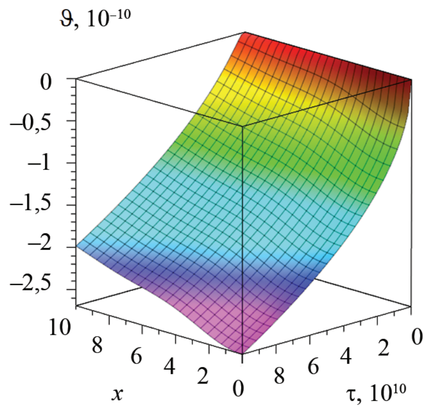

Рис. 2. Зависимость приращения температуры от времени и глубины полупространства

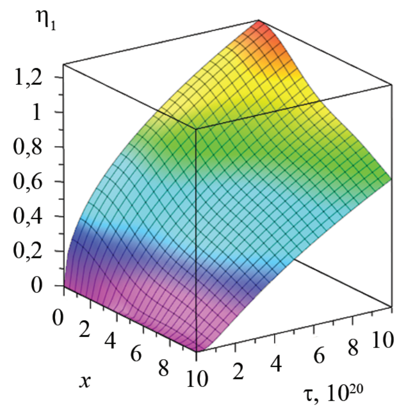

Рис. 3. Зависимость приращения концентрации от времени и глубины полупространства

Материал полупространства – алюминий ($N = 1$) при начальной температуре $T_0 = 700$ К. Характерный размер $L = 1$ м . Алюминию соответствуют следующие безразмерные величины, полученные с помощью формул (4):

$$M_1 = 3{,}599 \cdot 10^{-18};\ D_1 = 3{,}138 \cdot 10^{-19};$$

$$\alpha_1 = 4{,}433 \cdot 10^{-3};\ \tau_T = 6{,}372 \cdot 10^{-6};$$

$$\tau_{\eta 1} = 3{,}186;\ \kappa = 9{,}647 \cdot 10^{-9};$$

$$b_u = 1{,}605 \cdot 10^{-2};\ b_T = 1{,}012;\ \beta = 3{,}730.$$

Результаты вычислений сверток (5) с учетом равенств (12) и (13) представлены на рис. 1–3.

Здесь показаны пространственно-временные распределения перемещений, приращений температуры и концентрации, которые демонстрируют взаимосвязь указанных полей при заданных поверхностных возмущениях. Численные вычисления интегралов (8) и (10) проводились при 200 уз. Дальнейшее увеличение узлов не приводит к каким-либо значимым изменениям полученных результатов. Также необходимо отметить, что при $\tau_T = \tau_{\eta 1} \equiv 0$ графики на таких временных масштабах практически не отличаются от представленных выше.

Выводы

С помощью предложенного алгоритма решена одномерная нестационарная задача термоупругости с учетом диффузии для многокомпонентного полупространства при ненулевых временах релаксации. Основным достоинством данного подхода является возможность аналитически найти оригиналы функций Грина и провести их анализ. Эффективность метода продемонстрирована на конкретном расчетном примере.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00663 А и № 18-31-00437 мол_а).

Библиографический список

1. *Букрина Н.В., Князева А.Г.* Об оценке механических напряжений в композиционном материале при обработке импульсным источником нагрева // Математическое моделирование систем и процессов. 2008. № 16. С. 17–27.

2. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Поверхностные функции Грина в нестационарных задачах термомеханодиффузии // Проблемы прочности и пластичности. 2017. Т. 79. № 1. С. 38–47.

3. *Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Двухкомпонентное упругодиффузионное полупространство под действием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского Экономического сотрудничества. 2014. № 2. С. 31–38.

4. *Еремеев В.С.* Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984.

5. *Князева А.Г.* Введение в термодинамику необратимых процессов. Лекции о моделях. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014.
6. *Подстригач Я.С., Павлина В.С.* Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в компонентном твердом растворе // Физико-химическая механика материалов. 1965. Т. 4. С. 383–389.
7. *Indeitsev D.A., Semenov B.N., Sterlin M.D.* The phenomenon of localization of diffusion process in a dynamically deformed solid // Doklady Physics. 2012. Vol. 57. № 4. P. 171–173
8. T*arlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media / Encyclopedia of thermal stress. Volume 2. New York, London: Springer reference, 2014. P. 1064–1071.
9. *Davydov S.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* An elastic half-space under the action of one-dimensional time-dependent diffusion perturbations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36. № 4. P. 503–509.
10. *Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V.* Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2015. Vol. 56. № 6. P. 1023–1030.
11. *Sarhan Y. Atwa*. Generalized thermoelastic diffusion with effect of fractional parameter on plane waves temperature-dependent elastic medium // Journal of Materials and Chemical Engineering. 2013. Vol. 1. Is. 2. P. 55–74.
12. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // Intern. J. Mathem. and Mathem. Sci. 2006. Vol. 2006. P. 1–15.
13. *Elhagary M.A.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating // Acta Mech. 2013. Vol. 224. P. 3057–3069.
14. *El-Sayed A.M.* A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space // Mathematics and Mechanics of Solids. 2016. Vol. 21. № 9. P. 1045–1060.
15. *Kumar R., Chawla V.* A study of Green's functions for three-dimensional problem in thermoelastic diffusion media // African journal of mathematics and computer science research. 2014. Vol. 7. № 7. P. 68–78.
16. *Othman M.I.A., Elmaklizi Y.D.* 2-D problem of generalized magneto-thermoelastic diffusion, with temperature-dependent elastic moduli // Journal of physics. 2013. Vol. 2. № 3. P. 4–11.
17. *Sharma N., Kumar R., Ram P.* Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion // Int. J. Thermophys. 2008. Vol. 29. P. 1503–1522.
18. *Sherief H.H., El-Maghraby N.M.* A thick plate problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion // Int. J. Thermophys. 2009. Vol. 30. P. 2044–2057.

Сведения об авторах

Давыдов Сергей Андреевич, аспирант Московского авиационного института (Национального исследовательского университета). Адрес: 125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., 4, А-80, ГСП-3. Телефон: +7 (926) 897-57-41. E-mail: xenon_93@inbox.ru.

Земсков Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент Московского авиационного института (Национального исследовательского университета), старший научный сотрудник НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. Адрес: 119192, Россия, г. Москва, Мичуринский пр-т, 1. Телефон: +7 (926) 522-38-24. E-mail: azemskov1975@mail.ru.

Поступила / Received: 04.03.18
Принята в печать / Accepted: 28.04.18