Инженерно-строительный журнал, №2, 2010

# Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала

***К.т.н. В.М. Жгутов*,***
*ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»*

Известно, что в процессе деформирования оболочек в зависимости от уровня и длительности внешних воздействий могут проявиться различные свойства материала конструкции: упругость, пластичность, ползучесть и т.д. Проявление пластичности или ползучести приводит к необратимым последствиям. Для того чтобы конструкция являлась заведомо прочной и устойчивой, необходимо исключить возможность проявления этих свойств.

Вот почему актуальными и важными являются задачи разработки более совершенных моделей деформирования ребристых оболочек и соответствующих им алгоритмов исследования, а также анализа прочности и устойчивости ребристых оболочек при учете различных свойств материала.

В работе [1] автором фактически были получены уравнения равновесия упругих изотропных пологих оболочек [являющиеся с точки зрения известного принципа Германа-Эйлера-Даламбера составной частью уравнений динамики (движения) данных оболочек] при учете геометрической нелинейности, дискретного расположения ребер, их ширины, сдвиговой и крутильной жесткости, а также эффекта поперечных сдвигов и инерции вращения.

В настоящей работе выполнено обобщение, развитие и анализ предложенных автором математических моделей на случаи оболочек общего вида и при учете различных свойств материала при статических (как кратковременных, так и долговременных) нагрузках.

Рассматриваем оболочки общего вида с краем, подразумевая достаточно широкий класс оболочек наиболее распространенных частных видов: пологих на прямоугольном плане, вращения (например, цилиндрических, конических, сферических, торообразных), а также многих других (в том числе и составных) оболочек.

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной $h$ принимаем за отсчетную координатную поверхность $z = 0$. Координатные линии $x$ и $y$ ортогональной криволинейной системы координат ($-a \le x \le a$ и $-b \le y \le b$) направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочек вращения), а ось $z$ – по внутренней нормали поверхности $z = 0$ так, чтобы система координат $x, y, z$ была право-ориентированной.

Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на отсчетной поверхности не имеет особенностей.

С внутренней стороны оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра (или вырезы) задаем дискретно с помощью функции $H = H(x, y)$, характеризующей распределение ребер (вырезов) по оболочке, их ширину и высоту [1,2,3].

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$ и $-h/2 \le z \le h/2 + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами (или накладками), если же $H < 0$, то она ослаблена вырезами.

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее края (контура).

Будем учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги, а также возможные нелинейную упругость и ползучесть материала оболочки.

1. **Геометрические соотношения** в срединной поверхности $z = 0$ получаются с помощью операции ковариантного (абсолютного) дифференцирования векторного поля *смещения* (поля *деформаций*) и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \frac{DU}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_{11}^2 = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}V - K_x W + \frac{1}{2}\theta_{11}^2;$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{DV}{\partial y}+\frac{1}{2}\theta_{22}^{2}=\frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}U-K_{y}W+\frac{1}{2}\theta_{22}^{2}; \quad (1)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{DV}{\partial x}+\frac{DU}{\partial y}=\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}U+\frac{\partial B}{\partial x}V\right)+\theta_{12}^{2}.$$

Здесь $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$ и $\gamma_{xy}$ – компоненты тензора деформаций: деформации растяжения (сжатия) вдоль координатных линий $x, y$ и, соответственно, сдвига в касательной плоскости $(dx, dy)$;

$U=U(x,y), V=V(x,y)$ и $W=W(x,y)$ – компоненты вектора смещения (вектора деформаций) точек вдоль координатных линий $x, y$ и $z$ соответственно;

$A=A(x,y)$ и $B=(x,y)$ – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например, $A=B=1$ для пологой оболочки и $A=const$, $B=B(x)$ в случае оболочки вращения);

$K_x=K_x(x,y)=1/R_1$ и $K_y=K_y=1/R_2$ – главные кривизны ($R_1=R_1(x,y)$ и $R_2=R_2(x,y)$ – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль линий $x$ и $y$ соответственно;

$$\theta_{11}^{2}=\left(\frac{DU}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{DV}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{DW}{\partial x}\right)^{2};\ \theta_{22}^{2}=\left(\frac{DU}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{DV}{\partial y}\right)^{2}+\left(\frac{DW}{\partial y}\right)^{2};$$

$$\theta_{12}^{2}=\frac{DU}{\partial x}\cdot\frac{DU}{\partial y}+\frac{DV}{\partial x}\cdot\frac{DV}{\partial y}+\frac{DW}{\partial x}\cdot\frac{DW}{\partial y},$$

где $\frac{D}{\partial x}$ и $\frac{D}{\partial y}$ – операторы ковариантного дифференцирования по криволинейным координатам $x$ и $y$ [ $DU, DV$ и $DW$ – абсолютные (геометрические) дифференциалы смещений $U,V$ и $W$ ].

*Примечание 1.* Известно, что в некоторой системе ортогональных криволинейных координат $x_\alpha, 1\le\alpha\le 3$ оператор $\frac{D}{\partial x_\alpha}$ ковариантного дифференцирования произвольного *скалярного поля* $a=a(x_1,x_2,x_3)$, *векторного поля* $a_i=a_i(x_1,x_2,x_3), 1\le i\le 3$ и *тензорного поля* $a_{ik}=a_{ik}(x_1,x_2,x_3)$, $1\le i,k\le 3$ действует по следующим правилам [13]:

$$a \mapsto \frac{Da}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha},\ a_i \mapsto \frac{Da_i}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha}-\sum_{k=1}^{3}a_k\Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно, $a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{h_\alpha}\cdot\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha}-\sum_{l=1}^{3}(a_{lk}\Gamma_{il\alpha}+a_{il}\Gamma_{kl\alpha})$,

где $h_\alpha$ – метрические коэффициенты Ламе; $\Gamma_{ik\alpha}=\Gamma_{ik\alpha}(x_1,x_2,x_3)$ – символы Кристоффеля.

Известно также [13], что символы Кристоффеля симметричны по крайним индексам при $k\ne i, k\ne\alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha}=\Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha}=-\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha}=0$ при $i\ne k, i\ne\alpha, k\ne\alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk}=-\Gamma_{kik}$. При этом $\Gamma_{ikk}=-\Gamma_{kik}=\frac{1}{h_ih_k}\cdot\frac{\partial h_k}{\partial x_i}=\frac{1}{h_i}\cdot\frac{\partial \ln h_k}{\partial x_i}$.

Поясним, что в нашем случае и в наших обозначениях $x_1=x, x_2=y, x_3=z$ и $h_1=A, h_2=B, h_3=1$, а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид

$$\Gamma_{122}=-\Gamma_{212}=\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial B}{\partial x};\ \Gamma_{133}=-\Gamma_{313}=0;\ \Gamma_{211}=-\Gamma_{121}=\frac{1}{AB}\cdot\frac{\partial A}{\partial y};\ \Gamma_{233}=-\Gamma_{323}=0;$$

$$\Gamma_{311}=-\Gamma_{131}=\frac{1}{A}\cdot\frac{\partial A}{\partial z}=-K_x;\ \Gamma_{322}=-\Gamma_{232}=\frac{1}{B}\cdot\frac{\partial B}{\partial z}=-K_y.$$

В соотношениях (1) квадратичные члены характеризуют геометрическую нелинейность, которую необходимо учитывать в случаях достаточно больших смещений (деформаций), иными словами, в случаях, когда квадратом длины вектора смещений нельзя пренебречь в сравнении с его длиной.

Как правило, в процессе деформирования оболочек продольные смещения $U$ и $V$ на порядок превосходят поперечные смещения (прогибы) $W$. Очевидно, что в этом случае вместе с $U$ и $V$ малы и соответствующие их производные по координатам $x$ и $y$. Тогда в каждом из общих выражений для величин $\theta_{11}^2, \theta_{11}^2$ и $\theta_{12}^2$ можно пренебречь двумя первыми членами как малыми величинами второго порядка. Следовательно, можно положить

$$\theta_{11}^2 \approx \left(\frac{DW}{\partial x}\right)^2 = \theta_1;\ \theta_{22}^2 \approx \left(\frac{DW}{\partial y}\right)^2 = \theta_2;\ \theta_{12}^2 \approx \frac{DW}{\partial x}\cdot\frac{DW}{\partial y} = \theta_1\cdot\theta_2,$$

где $\theta_1 = -\frac{DW}{\partial x} = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + K_x U\right);\ \theta_2 = -\frac{DW}{\partial y} = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + K_y V\right).$

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = c f(z)(\psi_x - \theta_1);\ \gamma_{yz} = c f(z)(\psi_y - \theta_2), \quad (2)$$

где $\varphi_x$ и $\varphi_y$ – углы поворота отрезка нормали в плоскостях $(dx, dz)$ и $(dy, dz)$ соответственно;

$f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений $\tau_{xz}$ и $\tau_{yz}$ вдоль оси $z$ [1,3];

$c$ – константа.

Смещения и деформации в координатной поверхности $z \neq 0$ вычисляем по формулам [1,3]

$$U^z = U + z\psi_x,\ V^z = V + z\psi_y,\ W^z = W;$$

$$\varepsilon_{xx}^z = \varepsilon_{xx} + z\chi_1,\ \varepsilon_{yy}^z = \varepsilon_{yy} + z\chi_2,\ \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где

$$\chi_1 = \frac{D\psi_x}{\partial x} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\psi_y;\ \chi_2 = \frac{D\psi_y}{\partial y} = \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{D\psi_y}{\partial x} + \frac{D\psi_x}{\partial y} = \frac{1}{A}\frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\psi_y\right)$$

суть функции изменения кривизны и кручения.

2. **Физические соотношения** в произвольной точке оболочки, выполненной из *линейно упругого ортотропного* материала, в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид [4]:

$$\sigma_{xx} = G_{11}[\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy} + z(\chi_1 + \mu_2\chi_2)],\ \sigma_{yy} = G_{22}[\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx} + z(\chi_2 + \mu_1\chi_1)];\ \tau_{xy} = G_{12}[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}] \quad (3)$$

$$\tau_{xz} = G_{13}\gamma_{xz} = G_{13}k f(z)\big(\psi_x - \theta_1\big);\ \tau_{yz} = G_{23}\gamma_{yz} = G_{23}k f(z)\big(\psi_y - \theta_2\big),$$

где $E_1, E_2$ и $\mu_1, \mu_2$ – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона данного материала, причем

$E_1\mu_2 = E_2\mu_1;\ G_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2},\ G_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2};$

$G_{12}$, $G_{13}$ и $G_{23}$ – модули сдвига соответственно в плоскостях симметрии $(dx, dy)$, $(dx, dz)$ и $(dy, dz)$ материала оболочки.

В случае *изотропного* линейно упругого материала физические соотношения являются частным случаем соотношений (3) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$,

а также $G_{11} = \frac{E}{1-\mu^2}$, $G_{22} = \frac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Интегрируя компоненты тензора напряжений (3) по переменной $z$ ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получаем погонные усилия, моменты и поперечные силы, приведенные к отсчетной поверхности [4]:

$$N_{xx} = G_{11}[(h + \overline{F})(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \overline{S}(\chi_1 + \mu_2\chi_2)],\ N_{yy} = G_{22}[(h + \overline{F})(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \overline{S}(\chi_2 + \mu_1\chi_1)],$$

$$N_{xy} = G_{12}[(h+\overline{F})\gamma_{xy} + 2\overline{S}\chi_{12}];$$

$$M_{xx} = G_{11}\left[\overline{S}(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right],\ M_{yy} = G_{22}\left[\overline{S}(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right],$$

$$M_{xy} = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_{xz} = kG_{13}(h+\overline{F})(\psi_x - \theta_1),\ Q_{yy} = kG_{23}(h+\overline{F})(\psi_y - \theta_2). \quad (4)$$

Здесь $\overline{F},\ \overline{S},\ \overline{J}$ – площадь поперечного (продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\overline{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz,\ \overline{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} zdz,\ \overline{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

Физические соотношения для ортотропных материалов при учете *ползучести* материала в соответствии с теориями *упругоползучего тела* могут быть представлены в виде [5]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^e - \sigma_{xx}^c,\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^e - \sigma_{yy}^c,\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c,\ \tau_{yz} = \tau_{zy}^e - \tau_{zy}^c,$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие компонент тензора напряжений (отмечены индексом «*e*»), определяются с помощью формул

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{e}} = G_{11}(\varepsilon_{xx}^z + \mu_2\varepsilon_{yy}^z),\ \sigma_{yy}^{\mathrm{e}} = G_2(\varepsilon_{yy}^z + \mu_1\varepsilon_{xx}^z),\ \tau_{xy}^{\mathrm{e}} = G_{12}\gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{xz}^{\mathrm{e}} = G_{13}\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\mathrm{e}} = G_{23}\gamma_{yz}, \quad (5)$$

а составляющие компонент тензора напряжений, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «*c*»), вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{11}(\varepsilon_{xx}^z + \mu_2\varepsilon_{yy}^z)R_1(t,\tau)d\tau,\ \sigma_{yy}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{22}(\varepsilon_{yy}^z + \mu_1\varepsilon_{xx}^z)R_1(t,\tau)d\tau,\ \tau_{xy}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{12}\gamma_{xy}^z R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$\tau_{xz}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{13}\gamma_{xz}R_2(t,\tau)d\tau,\ \tau_{yz}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{23}\gamma_{yz}R_2(t,\tau)d\tau. \quad (6)$$

Здесь $R_1(t,\tau)$ и $R_2(t,\tau)$ – функции влияния материала при растяжении (сжатии) и сдвиге, где $t$ – время, $\tau$ – переменная интегрирования (имеет смысл времени);

$G_{11} = \dfrac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}$, $G_{22} = \dfrac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}$, $G_{12}$, $G_{13}$ и $G_{23}$ – модули сдвига [константы либо переменные коэффициенты (функции $t$) в общем случае], где $E_1$, $E_2$ и $\mu_1$, $\mu_2$ – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона (переменные либо константы).

Для изотропных материалов физические соотношения являются частным случаем соотношений (5) и (6) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а также $G_{11} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$, $G_{22} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$. [6,7].

Интегрируя напряжения (5) и (6) по переменной $z$ ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [5]:

$$N_{xx} = N_{xx}^{\mathrm{e}} - N_{xx}^{\mathrm{c}},\ N_{yy} = N_{yy}^{\mathrm{e}} - N_{yy}^{\mathrm{c}},\ N_{xy} = N_{xy}^{\mathrm{e}} - N_{xy}^{\mathrm{c}};\ M_x = M_x^{\mathrm{e}} - M_x^{\mathrm{c}},\ M_y = M_y^{\mathrm{e}} - M_y^{\mathrm{c}},$$

$$M_{xy} = M_{xy}^{\mathrm{e}} - M_{xy}^{\mathrm{c}};\ Q_{xz} = Q_{xz}^{\mathrm{e}} - Q_{xz}^{\mathrm{c}},\ Q_{yz} = Q_{yz}^{\mathrm{e}} - Q_{yz}^{\mathrm{c}}, \quad (7)$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (с индексом «*e*») внутренних силовых факторов вычисляются по формулам

$$N_{xx}^e(t) = G_{11}\left[(h+\overline{F})(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \overline{S}(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$N_{yy}^e(t) = G_{22}\left[(h+\overline{F})(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \overline{S}(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$N_{xy}^e(t) = G_{12}\left[(h+\overline{F})\gamma_{xy} + 2\overline{S}\chi_{12}\right].$$

$$M_{xx}^e(t) = G_{11}\left[\overline{S}(\varepsilon_{xx} + \mu_2\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$M_{yy}^e(t) = G_{22}\left[\overline{S}(\varepsilon_{yy} + \mu_1\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^e(t) = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_{xz}^e(t) = kG_{13}(h+\overline{F})(\psi_x - \theta_1);\ Q_{yz}^e(t) = kG_{23}(h+\overline{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а составляющие внутренних силовых факторов, обусловленные ползучестью материала (с индексом «*c*»), определяются с помощью выражений

$$N_{xx}^c = \int_{t_0}^{t} N_{xx}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\ N_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} N_{yy}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$N_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} N_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\ M_{xx}^c = \int_{t_0}^{t} M_{xx}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$M_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} M_{yy}^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\ M_{xy}^c = \int_{t_0}^{t} M_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$Q_{xx}^c(t) = \int_{t_0}^{t} Q_{xx}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\ Q_{yy}^c = \int_{t_0}^{t} Q_{yy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau.$$

*Примечание 2*. При решении задач ползучести интегралы по переменной $\tau$ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1}, t]$ заданной длины $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников [6,7].

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения для *нелинейно-упругого изотропного* материала имеют вид [8–12]

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^{\mathrm{e}} - \sigma_{xx}^{\mathrm{p}},\ \sigma_{yy} = \sigma_{yy}^{\mathrm{e}} - \sigma_{yy}^{\mathrm{p}},\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^{\mathrm{e}} - \tau_{xy}^{\mathrm{p}},$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^{\mathrm{e}} - \tau_{xz}^{\mathrm{p}},\ \tau_{yz} = \tau_{yz}^{\mathrm{e}} - \tau_{yz}^{\mathrm{p}},$$

где линейно упругие составляющие тензора напряжений (отмечены индексом «*e*») определяются с помощью известных формул

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{e}} = G_{11}(\varepsilon_{xx}^z + \mu\varepsilon_{yy}^z),\ \sigma_{yy}^{\mathrm{e}} = G_{22}(\varepsilon_{yy}^z + \mu\varepsilon_{xx}^z);$$

$$\tau_{xy}^{\mathrm{e}} = G_{12}\gamma_{xy}^z,\ \tau_{xz}^{\mathrm{e}} = G_{13}\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\mathrm{e}} = G_{23}\gamma_{yz},\ (8)$$

являющихся частным случаем соотношений (3) при $G_{11} = G_{22} = \dfrac{E}{1-\mu^2}$ и $G_{12} = G_{13} = G_{23} = \dfrac{E}{2(1-\mu)}$, а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие тензора напряжений (отмечены индексом «*p*») вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_{xx}^{\mathrm{p}} = G_{11}\omega(\varepsilon_i)(\varepsilon_{xx}^z + \mu\varepsilon_{yy}^z),\ \sigma_{yy}^{\mathrm{p}} = G_{22}\omega(\varepsilon_i)(\varepsilon_{yy}^z + \mu\varepsilon_{xx}^z);$$

$$\tau_{xy}^{\mathrm{p}} = G_{12}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{xy}^z,\ \tau_{xz}^{\mathrm{p}} = G_{13}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\mathrm{p}} = G_{23}\omega(\varepsilon_i)\gamma_{yz},\ (9)$$

где $\omega(\varepsilon_i)$ – безразмерная функция деформации (функция А.А. Ильюшина);

$\varepsilon_i = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_x^z)^2 + \varepsilon_x^z\varepsilon_y^z + (\varepsilon_y^z)^2 + \dfrac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2]}$ – интенсивность деформации [5].

Интегрируя напряжения (8) и (9) по переменной $z$ ($-h/2 \le z \le h/2 + H$), получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [8-11]:

$$N_{xx} = N_{xx}^{\mathrm{e}} - N_{xx}^{\mathrm{p}},\ N_{yy} = N_{yy}^{\mathrm{e}} - N_{yy}^{\mathrm{p}},\ N_{xy} = N_{xy}^{\mathrm{e}} - N_{xy}^{\mathrm{p}},$$

$$M_{xx} = M_{xx}^{\mathrm{e}} - M_{xx}^{\mathrm{p}},\ M_{yy} = M_{yy}^{\mathrm{e}} - M_{yy}^{\mathrm{p}},\ M_{xy} = M_{xy}^{\mathrm{e}} - M_{xy}^{\mathrm{p}}$$

$$Q_{xz} = Q_{xz}^{\text{e}} - Q_{xz}^{\text{p}},\; Q_{yz} = Q_{yz}^{\text{e}} - Q_{yz}^{\text{p}}, \quad (10)$$

где линейно упругие составляющие (с индексом «*e*») вычисляются по формулам

$$N_{xx}^{e} = G_{11}[(h+\bar F)(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}) + \bar S(\chi_1+\mu\chi_2)];$$

$$N_{yy}^{e} = G_{22}[(h+\bar F)(\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx}) + \bar S(\chi_2+\mu\chi_1)];$$

$$N_{xy}^{e} = G_{12}[(h+\bar F)\gamma_{xy} + 2\bar S\chi_{12}];$$

$$M_{xx}^{e} = G_{11}\left[\bar S(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}) + \left(\frac{h^3}{12}+\bar J\right)(\chi_1+\mu\chi_2)\right]; \quad (11)$$

$$M_{yy}^{e} = G_{22}\left[\bar S(\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx}) + \left(\frac{h^3}{12}+\bar J\right)(\chi_2+\mu\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^{e} = G_{12}\left[\bar S\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12}+\bar J\right)\chi_{12}\right],$$

$$Q_{xz}^{e} = kG_{13}(h+\bar F)(\psi_x-\theta_1);\; Q_{yz}^{e} = kG_{23}(h+\bar F)(\psi_y-\theta_2),$$

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (с индексом «*p*») внутренних силовых факторов определяются с помощью выражений

$$N_{xx}^{\text{p}} = G_{11}[I_1(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}) + I_2(\chi_1+\mu\chi_2)];$$

$$N_{yy}^{\text{p}} = G_{22}[I_1(\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx}) + I_2(\chi_2+\mu\chi_1)];$$

$$N_{xy}^{\text{p}} = G_{12}(I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12});$$

$$M_{xx}^{\text{p}} = G_{11}[I_2(\varepsilon_{xx}+\mu\varepsilon_{yy}) + I_3(\chi_1+\mu\chi_2)]; \quad (12)$$

$$M_{yy}^{\text{p}} = G_{22}[I_2(\varepsilon_{yy}+\mu\varepsilon_{xx}) + I_3(\chi_2+\mu\chi_1)];$$

$$M_{xy}^{\text{p}} = G_{12}(I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12});$$

$$Q_{xz}^{\text{p}} = G_{13}kI_4(\psi_x-\theta_1);\; Q_{yz}^{\text{p}} = G_{23}kI_4(\psi_y-\theta_2).$$

В соотношениях (12) $I_s = \int\limits_{-h/2}^{h/2+H}\omega(\varepsilon_i)z^{s-1}dz,\ 1\le s\le 3;\ I_4 = \int\limits_{-h/2}^{h/2+H}\omega(\varepsilon_i)f(z)dz$ – жесткостные параметры.

3. В соответствии с фундаментальным принципом минимума потенциальной энергии (принципом Лагранжа) из всех кинематически возможных смещений упругой системы в действительности реализуются лишь те, которые доставляют стационарное значение величине (полной энергии) [1]

$$Э = \Pi - A^E, \quad (11)$$

где $\Pi$ – потенциальная энергия системы;

$A^E$ – работа внешних сил.

Математически принцип Лагранжа в нашем случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta Э = \delta\Pi - \delta A^E, \quad (12)$$

где $\delta$ – символ вариации.

Здесь $\Pi = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}^{z} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy}^{z} + \tau_{xy}\gamma_{xy}^{z} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}]d\Omega$, (13)

$$A^E = \frac{1}{2}\iint\limits_{S}(P_xU + P_yV + qW)dS, \quad (14)$$

где $P_x, P_y$ и $q$ – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий $x, y$ и $z$;

$\Omega$ – область в пространстве ($x, y, z$);

$S$ – область в плоскости ($x, y$);

$d\Omega$ и $dS$ – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ( $d\Omega = ABdxdydz$ ; $dS = ABdxdy$ ).

Проинтегрировав по $z$ ( $-h/2 \le z \le h/2 + H$ ) выражение (13), получим:

$$\Pi = \frac{1}{2}\iint_S \left[ N_{xx}\varepsilon_{xx} + N_{yy}\varepsilon_{yy} + N_{xy}\gamma_{xy} + M_{xx}\chi_1 + M_{yy}\chi_2 + 2M_{xy}\chi_{12} + Q_{xz}(\psi_x - \theta_1) + Q_{yz}(\psi_y - \theta_2) \right] dS, \quad (15)$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), а деформации – по формулам (1) и (2).

С учетом (14) вариационное уравнение (12) обретает вид

$$\delta Э = \frac{1}{2}\iint_S \left[ N_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + N_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + N_{xy}\delta\gamma_{xy} + M_{xx}\delta\chi_1 + M_{yy}\delta\chi_2 + 2M_{xy}\delta\chi_{12} + \right.$$

$$\left. + Q_{xz}\delta(\psi_x - \theta_1) + Q_{yz}\delta(\psi_y - \theta_2) - (P_x\delta U + P_y\delta V + q\delta W) \right] dS = 0. \quad (16)$$

Преобразуем вариационное уравнение (16) так, чтобы под знаком (двойного) интеграла не было вариаций от производных искомых функций $U, V, W$ и $\psi_x, \psi_y$.

Суть преобразования вариационного уравнения (с применением интегрирования по частям) поясним на примере первого члена:

$$\iint_S N_{xx}\delta\varepsilon_{xx} dS = \iint_S N_{xx}\delta\frac{DU}{\partial x} dS + \iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{DW}{\partial x} dS,$$

где

$$\iint_S N_{xx}\delta\frac{DU}{\partial x} dS = \iint_S N_{xx}\delta\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} dS + \iint_S \left( N_{xx}\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\delta V - N_{xx}K_x\delta W \right) dS,$$

$$\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{DW}{\partial x} dS = -\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} dS - \iint_S N_{xx}\theta_1 K_x\delta U dS,$$

причем

$$\iint_S N_{xx}\delta\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} dS = \int_{-b}^{b} N_{xx}\delta U \Big|_{x=-a}^{x=a} Bdy - \iint_S \frac{1}{A}\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}\delta U dS,$$

$$-\iint_S N_{xx}\theta_1\delta\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} dS = -\int_{-b}^{b} (N_{xx}\theta_1)\delta W \Big|_{x=-a}^{x=a} Bdy + \iint_S \frac{1}{A}\frac{\partial(N_{xx}\theta_1)}{\partial x}\delta W dS.$$

В результате, используя известные из тензорного анализа [13,14] выражения (для дивергенции тензора в ортогональных криволинейных координатах) типа

$$\frac{DN_{xx}}{\partial x} + \frac{DN_{xy}}{\partial y} = \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(AN_{xy})}{\partial y} \right), \quad \frac{DN_{yy}}{\partial y} + \frac{DN_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(BN_{xy})}{\partial x} \right)$$

и т.д., приведем вариационное уравнение (16) к виду

$$\delta Э = -\iint_S \left[ \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(AN_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B}{\partial x}N_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y}N_{xy} \right) - K_xQ_{xz} + K_x(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2) + P_x \right]\delta U dS -$$

$$-\iint_S \left[ \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(BN_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial A}{\partial y}N_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x}N_{xy} \right) - K_yQ_{yz} + K_y(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1) + P_y \right]\delta V dS -$$

$$-\iint_S \left[ K_xN_{xx} + K_yN_{yy} + \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(BQ_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(AQ_{yz})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial A(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1)}{\partial y} \right) + q \right]\delta W dS -$$

$$-\iint_S \left[ \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial(BM_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(AM_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B}{\partial x}M_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y}M_{xy} \right) - Q_{xz} \right]\delta\psi_x dS -$$

$$-\iint_S \left[ \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (AM_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BM_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial A}{\partial y} M_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy} \right) - Q_{yz} \right] \delta\psi_y dS +$$

$$+ \int_{-b}^{b} \left[ N_{xx}\delta U + N_{xy}\delta V + \left( Q_{xz} - N_{xx}\theta_1 - N_{xy}\theta_2 \right)\delta W + M_{xx}\delta\psi_x + M_{xy}\delta\psi_y \right] \Bigg|_{x=-a}^{x=a} Bdy +$$

$$+ \int_{-a}^{a} \left[ N_{xy}\delta U + N_{yy}\delta V + \left( Q_{yz} - N_{yy}\theta_2 - N_{xy}\theta_1 \right)\delta W + M_{xy}\delta\psi_x + M_{yy}\delta\psi_y \right] \Bigg|_{y=-b}^{y=b} Adx = 0 . \quad (17)$$

Полагая в вариационном уравнении (17) вариации $\delta U, \delta V, \delta W$ и $\delta\psi_x, \delta\psi_y$ произвольными под знаком двойного интеграла и приравнивая нулю сомножители, стоящие перед ними, получим искомые *уравнения равновесия оболочки*:

$$\frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (BN_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AN_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B}{\partial x} N_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right) - K_x Q_{xz} + K_x (N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2) + P_x = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (AN_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BN_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial A}{\partial y} N_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} N_{xy} \right) - K_y Q_{yz} + K_y (N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1) + P_y = 0;$$

$$K_x N_{xx} + K_y N_{yy} + \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (BQ_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial (AQ_{yz})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B(N_{xx}\theta_1 + N_{xy}\theta_2)}{\partial x} + \frac{\partial A(N_{yy}\theta_2 + N_{xy}\theta_1)}{\partial y} \right) + q = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (BM_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (AM_{xy})}{\partial y} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial B}{\partial x} M_{yy} - \frac{\partial A}{\partial y} M_{xy} \right) - Q_{xz} = 0;$$

$$\frac{1}{AB}\left( \frac{\partial (AM_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (BM_{xy})}{\partial x} \right) - \frac{1}{AB}\left( \frac{\partial A}{\partial y} M_{xx} - \frac{\partial B}{\partial x} M_{xy} \right) - Q_{yz} = 0 . \quad (18)$$

Из равенства нулю одномерных интегралов, входящих в вариационное уравнение (17), получаем естественные *граничные* (*краевые) условия* на контуре оболочки:

- при $x = -a$ и $x = a$

$$N_{xx} = const \text{ или } U = const, \; N_{xy} = const \text{ или } V = const,$$

$$-N_{xx}\theta_1 - N_{xy}\theta_2 + Q_{xz} = const \text{ или } W = const,$$

$$M_{xx} = const \text{ или } \psi_x = const, \; M_{xy} = 0 \text{ или } \psi_y = const;$$

- при $y = -b$ и $y = b$

$$N_{xy} = const \text{ или } U = const, \; N_{yy} = const \text{ или } V = const,$$

$$-N_{yy}\theta_2 - N_{xy}\theta_1 + Q_{yz} = const \text{ или } W = const,$$

$$M_{xy} = const \text{ или } \psi_x = const, \; M_{yy} = const \text{ или } \psi_y = const .$$

Полученные уравнения движения (18) ортотропных и изотропных ребристых оболочек общего вида позволяют совместно учитывать геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их конечную ширину, сдвиговую и крутильную жесткости ребер, а также эффект поперечных сдвигов.

Кроме того, уравнения (18) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

Заметим, что в частном случае *пологих* ребристых оболочек (в процессе деформирования которых полагается, что величины $K_x U$ и $K_y V$ малы, $\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} >> K_x U$ и $\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} >> K_y V$, а значит $\theta_1 \approx -\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}$; $\theta_2 \approx -\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}$, причем $A = B = 1$) уравнения равновесия (18) существенно упрощаются и имеют вид

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}-K_xQ_{xz}+K_x(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)+P_x=0;$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}-K_yQ_{yz}+K_y(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)+P_y=0;$$

$$K_xN_{xx}+K_yN_{yy}+\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y}-\left(\frac{\partial(N_{xx}\theta_1+N_{xy}\theta_2)}{\partial x}+\frac{\partial(N_{yy}\theta_2+N_{xy}\theta_1)}{\partial y}\right)+q=0;$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_{xz}=0;\ \frac{\partial M_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_{yz}=0. \quad (19)$$

Граничные условия для пологих оболочек сохраняют прежний вид.

*Примечание 3.* Следуя А.К. Платонову и Э.Г. Перцеву [15], в первых двух уравнениях (19) членами, содержащими $\theta_1$ и $\theta_2$, можно пренебречь, считая их несущественными.

*Примечание 4.* Следует заметить, что если непосредственно выводить уравнения равновесия пологих оболочек с учетом сделанных выше предположений, то в первых двух уравнениях (19) будут отсутствовать члены $K_xQ_{xz}$ и $K_yQ_{yz}$ в силу того, что при выводе (19) в квадратичных членах от угловых перемещений (характеризующих геометрическую нелинейность) величины $K_xU$ и $K_yV$ принимались равными нулю.

**Литература**


1. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. … канд. техн. наук: 05.23.17. СПб., 2004.
2. Жгутов В.М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек. // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №8. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 08/zhgoutov1.html.
3. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие // В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников. М., СПб., 2002.
4. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7.– Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
5. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009.– №7. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале ребристых пологих оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 1. М., 2010.
7. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
8. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал.– 2009. – №6. – С.16–24. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 06/zhgoutov.html.
9. Жгутов В.М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009.–№ 4. Спб., 2009.
10. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых пологих оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4.
11. Жгутов В.М. Устойчивость упругопластических ребристых оболочек при больших перемещениях // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Популярное бетоноведение. – 2009. – № 6. Спб., 2009.
13. Акивис М.А., В.В. Гольдберг. Тензорное исчисление. – М., 1969.
14. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М., 1965.
15. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин. – Л., 1987.


**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*
*Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru*